

Lösningssanvisningar — får ej medtas till tentamen!

RT 0713. Detta är en tillämpning på blockschemaalgebra och överföringsfunktioner.

(a) Om vi börjar med att betrakta hur Y_1 beror av insignalerna får vi

$$Y_1 = 2 \left\{ R_2 + \frac{1}{s+2} \left[R_1 - \frac{s}{s+3} (Y_1 - R_3) \right] \right\}$$

som efter flyttning av Y_1 från högra ledet till vänstra ledet och hyfsning ger ett uttryck av formen $Y_1 = G_{11}R_1 + G_{12}R_2 + G_{13}R_3$, där G_{11} , G_{12} och G_{13} är tre av de efterfrågade överföringsfunktionerna. Utgående från

$$Y_2 = \frac{s}{s+3} (Y_1 - R_3)$$

fås genom eliminering av Y_1 med uttrycket ovan samt ytterligare hyfsning ett uttryck av formen $Y_2 = G_{21}R_1 + G_{22}R_2 + G_{23}R_3$ och de tre resterande överföringsfunktionerna G_{21} , G_{22} och G_{23} .

Överföringsfunktionerna blir uttryckt av formen $G_{ij}(s) = B_{ij}(s) / A_{ij}(s)$, där $A_{ij}(s)$ och $B_{ij}(s)$ är polynom i Laplacevariabeln s . Man kan också med fördel ge polynomen i *faktorerad form* så att t.ex. nämnaren har formen $(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)$, men *inte en blandning* av båda så att nämnaren består av en faktorerad del och ett antal separata termer.

(b) Överföringsfunktionens *poler* ges av lösningarna till ekvationen $A_{ij}(s) = 0$ och dess *nollställen* av lösningarna till ekvationen $B_{ij}(s) = 0$. Speciellt enkelt finner man lösningarna om $A_{ij}(s)$ (och $B_{ij}(s)$) är i faktorerad form. Obs. också att lösningar till $B_{ij}(s) = 0$ saknas om $B_{ij}(s)$ är en ren konstant och då saknas också nollställen.

Om man funnit en pol $s = -p_i$ så motsvaras denna av en *tidskonstant* $T_i = 1/p_i$, *inte* $T_i = p_i$ som de flesta skrivit utgående från en faktor $(s + p_i)$. Om man uttrycker överföringsfunktionen med hjälp av tidskonstanter skall ju dessa ingå i faktorer av formen $(T_i s + 1)$.

(c) Med hjälp av *slutvärdesteoremet* och ledtråden i uppgiftstexten fås förstärkningen K_{ij} för överföringsfunktionen $G_{ij}(s)$ enligt $K_{ij} = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot G_{ij}(s) \cdot 1/s) = \lim_{s \rightarrow 0} (G_{ij}(s)) = G_{ij}(0)$, dvs med substitutionen $s = 0$ i överföringsfunktionen.

RT 0714. Vårt system har överföringsfunktionen $G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$.

(a) För det reglerade systemet gäller $Y = GG_c(R - Y)$, där Y är systemets utsignal, R är dess börvärde och G_c är regulatorns överföringsfunktion. Eftersom regulatorn är en P-regulator, är G_c lika med regulatorns förstärkning K_c . Det reglerade systemets överföringsfunktion blir då $Y/R = G_r = GK_c / (1 + GK_c) = 2K_c / (s^2 + 2s + 2K_c)$, dvs ett andra ordningens system.

Med standardbeteckningar kan överföringsfunktionen skrivas $G_r = K \omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)$, där ζ är systemets relativa dämpning, ω_n är dess odämpade egenfrekvens, och K är systemets förstärkning. Vi ser alltså att $2K_c = \omega_n^2$, $\zeta \omega_n = 1$ (samt $K = 1$), från vilket K_c kan lösas så att önskad relativ dämpning erhålles.

(b) Uppgiften är att beräkna fasmarginal och förstärkningsmarginal för ett system med kretsöverföringen $G_L(s) = 2K_c / [s(s+2)] = 2K_c / (s^2 + 2s)$, där K_c har ovan beräknade värde. Detta är ett 2:a ordningens system, men vi kan inte direkt använda de uttryck för amplitudförhållande

och fasförskjutning som finns i kursmaterialet, eftersom G_L :s nämnare saknar en konstant term. Vi måste därför härleda de behövliga uttrycken.

Vi börjar med att skriva kretsöverföringen i formen $G_L(s) = K_c / [s(Ts + 1)]$, där $T = 1/2$. Eftersom en integrator (dvs faktorn s i G_L :s nämnare) alltid bidrar med en fasförskjutning lika med $-\pi/2$ radianer (dvs -90°), ges fasmarginalen φ_m av $\varphi_m = \pi - \pi/2 - \arctan(T\omega_g)$, där ω_g är den vinkelfrekvens där amplitudförhållandet $A_R(\omega_g) = |G_L(\omega_g)| = 1$. Eftersom en integrator bidrar med amplitudförhållandet $1/\omega_g$ vid frekvensen ω_g , fås

$$A_R(\omega_g) = \frac{K_c}{\omega_g} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(T\omega_g)^2}} = 1$$

som efter hyfsning ger $K_c^2 = \omega_g^2 [1 + (T\omega_g)^2]$ och vidare $x^2 + T^{-2}x - T^{-2}K_c^2 = 0$, där $x = \omega_g^2$. Lösning av andragradsekvationen ger $x (> 0)$ och vidare $\omega_g = \sqrt{x}$, som möjliggör beräkning av fasmarginalen φ_m . Om den är över 30° (ca 0,5 radianer) kan den anses acceptabel.

Förstärkningsmarginalen A_m ges av $A_m = 1/|G_L(\omega_c)| = \omega_c \sqrt{1+(T\omega_c)^2}$, där ω_c är systemets kritiska vinkelfrekvens. Eftersom systemet är av andra ordningen utan dödtid kan man genast säga vilken den kritiska frekvensen är (eller eg. dess gränsvärde) och därmed vad detta innebär för förstärkningsmarginalen. Om man är osäker på svaret, kan man härleda det ur uttrycket $-\pi = -\pi/2 - \arctan(T\omega_c)$, dvs $\omega_c = T^{-1} \tan(\pi/2)$.

- (c) Vi har nu en kretsöverföring $\tilde{G}_L(s) = \frac{K_c e^{-Ls}}{s(Ts + 1)}$ med $T = 1/2$ och det K_c som bestäms ovan.

Vi söker dödtiden L så att systemet är på gränsen till instabilitet. Då är $A_R(\omega_c) = |\tilde{G}_L(\omega_c)| = 1$, där ω_c är kritiska frekvensen. Eftersom dödtiden inte påverkar amplitudförhållandet blir uttrycket för $A_R(\omega_c)$ detsamma som uttrycket för $A_R(\omega_g)$ ovan och därmed också $\omega_c = \omega_g$.

Dödtiden fås då från villkoret att kretsöverföringens fasförskjutning skall vara -180° , dvs

$$-\pi = -\omega_c L - \pi/2 - \arctan(T\omega_c) \Rightarrow L = [\pi/2 - \arctan(T\omega_c)]/\omega_c.$$

- (d) Om systemet är på gränsen till instabilitet vid ett givet värde på K_c , fås ett system med förstärkningsmarginalen 2 genom att halvera K_c :s värde.

RT 0715. Modellerna bestäms helt enligt anvisningarna i kursmaterialet. I (a)-fallet används modifierade tangentmetoden eller S-K-metoden, i (b)-fallet Harriotts (modifierade) metod.

Enligt det bifogade stegsvaret verkar $Y_0 = 2,22$ vara lämplig "nollnivå" för utsignalen. Vilket det slutliga värdet Y_∞ blir när $t \rightarrow \infty$ är inte helt klart, men det tycks ligga mellan 3,13 och 3,2. Nu har vi ännu inte identifierat systemets tidskonstant, men utgående från hur länge det tar att nå ung. 63 % av totala förändringen verkar tidskonstanten med beaktande av en dödtid på ca 2 min vara ca 5,5 min. Vid tidpunkten $t = 21$ min borde vi då ha nått ca $1 - e^{-19/5,5} \approx 97\%$ av totala förändringen. $Y_\infty = 3,16$ borde därmed vara ett bra val, som ger totala utsignalförändringen $y_\infty = Y_\infty - Y_0 = 0,94$. Systemets förstärkning K blir då $= y_\infty / u_{\text{steg}}$, där u_{steg} är insignalförändringens storlek (här = 2).

När man bestämmer en modell av första ordningen, får man i praktiken bättre modellenpassning genom att välja en dödtid L som är litet större än vad den verkliga dödtiden ser ut att vara. Detta betyder att ett val $L = 2 \dots 2,5$ min här torde vara bäst för ett första ordningens system.

En orsak till att välja en modell av andra ordningen är att bättre kunna beskriva stegsvarets initialrespons. Därmed bör man inte välja en "onödigt" stor dödtid vid bestämning av en modell av andra ordningen. Enligt det experimentella stegsvaret kunde dödtid saknas, men det visar sig då att man inte kan bestämma en modell enligt Harriotts metod eftersom kravet $y_z / y_\infty \geq 0,27$ då inte uppfylls. Lämpligt val av dödtid torde därmed vara $L = 1 \dots 1,5$ min.